МАТРИЦАЛАР. АНЫҚТАУЫШТАР.

1. Матрица және оларға қолданылатын амалдар.

1.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}=(a_{ik})=\|a_{ik}\|$$

түріндегі тіктөртбұрышты кесте $m\times n$ өлшемді матрица немесе $(m\times n)$- матрицасы деп, ал a_{ik}, $i=\overline{1,m}$, $k=\overline{1,n}$ - матрицаның элементтері деп аталады.

2. Екі $(m\times n)$ - матрицалары тең деп аталады, егер олардың сәйкес элементтері тең болса.

3. Егер $m = n$, онда A матрицасы n-ші ретті квадрат матрица деп аталады.

4. A квадрат матрицасының детерминанты немесе анықтауышы деп $\det A = \left| a_{ik} \right|$ санын айтамыз.

5.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

түріндегі матрица бірлік матрица деп аталады.

Матрицаларға қолданылатын амалдар

1. $m\times n$ өлшемді $A=\left(a_{ik}\right)$ и $B=\left(b_{ik}\right)$ матрицаларынын қосындысы $A+B$ деп

$m\times n$ өлшемді $C=\left(c_{ik}\right)$ матрицасын айтамыз, мұндағы

$$c_{ik}=a_{ik}+b_{ik}, \quad i=\overline{1,m}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Мысал

1. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 8 & 9\\ 10 & 11 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+7 & 2+8 & 3+9\\ 4+10 & 5+11 & 6+12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 10 & 12\\ 14 & 16 & 18\end{pmatrix}.$

2. $m\times n$ өлшемді $A=\left(a_{ik}\right)$ матрицасынын α санына көбейтіндісі $\alpha\cdot A$ деп $m\times n$ өлшемді $B=\left(b_{ik}\right)$ матрицасын айтамыз, мұндағы

$$b_{ik}=\alpha\cdot a_{ik}, \quad i=\overline{1,m}, \quad k=\overline{1,n}.$$

Мысал 2. $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $\quad 3A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{pmatrix}.$

3. $m \times n$ өлшемді $A = (a_{ik})$ матрицасы мен $n \times p$ өлшемді $B = (b_{ik})$ матрицаларының көбейтіндісі $A \cdot B$ деп $m \times p$ өлшемді $C = (c_{ik})$ матрицасын айтамыз, мұндағы $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, p}$.

Мысал

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 7 & 10 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 6 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 & 1 \cdot 9 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 11 \\ 4 \cdot 6 + 5 \cdot 7 + 6 \cdot 8 & 4 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 & 62 \\ 107 & 152 \end{pmatrix}$$

Е с к е р т у.

1. Матрицаларды көбейте аламыз тек сол жағдайда ғана, егер бірінші көбейгіш матрица бағанының саны екінші көбейткіш матрицаның жолының санына тең болса.

1. Егер $A \cdot B$ және $B \cdot A$ көбейтінділері табылса, онда жалпы жағдайда $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Мысал4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ матрицалары берілген. AB және BA тап.

$$AB = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 5(-1) & 3(-5) + 5 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-5) \cdot 1 & 1 \cdot 5 + (-5) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 & (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Бұдан, $AB \neq BA$ екенін көруге болады. (Бұл жағдайда матрицалардың көбейтіндісі орын ауыстырымдылық қасиетке бағынбайтындығына көз жеткіземіз).

Мысал 5. $(AB)C$ және $A(BC)$ тап, егер

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\\ 2 & 5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -6 & 1\\ 1 & 3 & -1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 4\end{pmatrix}.$$

$$AB=\begin{pmatrix}5 & 3 & -2\\ -1 & 9 & -2\\ 9 & 3 & -3\end{pmatrix},\quad (AB)C=\begin{pmatrix}-7\\ 11\\ -15\end{pmatrix}$$

және $BC=\begin{pmatrix}-10\\ 1\end{pmatrix},\quad A(BC)=\begin{pmatrix}-7\\ 11\\ -15\end{pmatrix}$

есептей келе, $(AB)C=A(BC)$ көреміз.

2. Анықтауыштар

II–ретті анықтауышты есептеу ережесі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Мысалдар: 1) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 1 = 17$

2) $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 0 = -6$

3) $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-5) - (-2) \cdot 3 = 5 + 6 = 11$.

Ескерту. Егер анықтауыштың элементтері қандай да бір функциялар болса, онда бұл анықтауыш та функция болады(сан болуы да мүмкін).

Мысалы,

4) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

5) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

6) $\begin{vmatrix} tgx & 2 \\ \frac{1}{2} & ctgx \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$

Анықтама 3. a_{ik} элементінің M_{ik} миноры деп (1)-ден i-ші жол мен k-шы бағанды сызып тастау нәтижесінде пайда болған $n-1$-ші ретті анықтауышты айтамыз. $A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}$ шамасы a_{ik} элементінің алгебралық толықтауышы деп аталады.

7) $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ анықтауышы берілген.

a_{23} элементінің сәйкес M_{23}, A_{23} тап.

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1-2\cdot(-2)=5; \quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot M_{23}=-5.$$

III-ші ретті анықтауышты есептеу үшін үшбұрыштар ережесін қолданамыз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 6\cdot 1 + 2\cdot 5\cdot 2 + 4(-1)\cdot(-3) - (-3)\cdot 6\cdot 2 - 2\cdot 4\cdot 1 - 5\cdot(-1)\cdot 1 = 71$$

Анықтауышың қасиеттері

1. Анықтауыштың мәні:
1. өзгермейді, егер оның жолдарын (бағандарын) сәйкес бағандармен (жолмен) алмастырсақ,
2. таңбасын өзгертеді, егер екі жолдың (бағанның) орындарын алмастырсақ,
3. k $(k \neq 0)$ санына көбейтіледі, егер қандай да бір жолдың (бағанның) барлық элементтерін k санына көбейтсек,
4. нөлге тең, егер кез келген жолдың (бағанның) барлық элементтері нөлге тең болса,
5. нөлге тең, егер қандай да бір екі жолдың (бағанның) сәйкес элементтері тең болса немесе пропорционал болса.
6. Кез келген жолдың элементтеріне басқа бір жолдың сәйкес элементтерін қандай да бір нөлге тең емес санға көбейтіп, қосқаннан анықтауыштың мәні өзгермейді.

Анықтауышты есептеу әдістері:

А) жолының (бағанының) элементтері бойынша жіктеу

Қандай да бір жолдың (бағанның) элементтерінің осы элементтің сәйкес алгебралық толықтауышына көбейтінділерінің қосындысы анықтауыштың мәніне тең.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}, \qquad (i = 1, 2, \dots n).$$

Б) Анықтауыштың бас диагоналінің жоғарғы және төменгі жағында орналасқан элементтердің барлығы нөлге тең болса, ондай анықтауыш үшбұрышты түрге келтірілген анықтауыш деп аталады. Бұл жағдайда анықтауыш бас диагоналдің элементтерінің көбейтіндісіне тең. Кез келген анықтауышты үшбұрышты түрге келтіру үнемі мүмкін.

10) а) 3-ші бағанның элементтері бойынша жіктеу арқылы анықтауыштың мәнін есепте б) 1-ші жолдың элементтері бойынша жіктеу арқылы анықтауышты есепте

а)

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{13} + 2 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8 + 10 = 2 .$$

б) $$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = i \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - j \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} .$$

3. Кері матрица

Анықтама 6. A текше матрицасы қайтымды емес немесе ерекше матрица деп аталады, егер $\det A = 0$, кері жағдайда қайтымды немесе ерекше емес матрица деп аталады.

Теорема 1. Егер A - қайтымды матрица болса, онда A^{-1} матрицасы табылады және ол тек біреу ғана болып, төмендегі теңдік орындалады:

$A^{-1}A = AA^{-1} = E$, мұндағы E – бірлік матрица.

A^{-1} матрицасы кері матрица деп аталады және төмендегі формула бойынша есептелінеді

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

мұндағы A_{ik}, $i, k = \overline{1, n}$, - A матрицасының элементтерінің алгебралық толықтауышы.

Мысал 6. A матрицасына кері матрицаны тап.

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 1 & 4 & 2\\ 1 & -4 & 0\end{pmatrix}.$$

Шешуі. $\det A = 2 \neq 0$ (4 мысалды қара) болғандықтан, A матрицасы қайтымды. Алгебралық толықтауыштарды табамыз:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ -4 & 0\end{vmatrix}=8,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=2,\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 4\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{21}=-4,\quad A_{22}=-1,\quad A_{23}=5,\quad A_{31}=-10,\quad A_{32}=-3,\quad A_{33}=11.$$

Бұдан

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}8 & -4 & -10\\ 2 & -1 & -3\\ -8 & 5 & 11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2 & -5\\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ -4 & \frac{5}{2} & \frac{11}{2}\end{pmatrix}.$$

4. Матрицаның рангі

Анықтама 7. A матрицасының k-шi ретті миноры деп A матрицасының кез келген таңдап алынған k баған мен k жолдың элементтерінен құралған анықтауышты айтамыз.

Мысал 8. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$ берілген.

Оның 2-ші ретті минорлары

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{vmatrix}$$

және тағы басқалар.

3-ші ретті минорлары

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 8 \\ 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}.$$

Теорема 2. Егер k-шы ретті минорлардың барлығы нөлге тең болса, онда k-дан жоғарғы ретті барлық минорлар нөлге тең болады.

Анықтама 8. Матрицаның ***рангі*** $r(A)$ деп нөлге тең емес минордың ең жоғарғы ретін айтамыз, ал кез келген $r(A)$-ші ретті нөлге тең емес минор ***базистік минор*** деп аталады.

Мысал 9. Матрицаларды көмкеру әдісі.

A матрицасында k-ші ретті $M_k \neq 0$ миноры табылды делік. Осы M_k минорын көмкеретін $k+1$-ші ретті минорларды қарастырамыз. Егер ол минорлардың барлығы нөлге тең болса, онда $r(A)=k$.

Егер M_k минорын көмкеретін $k+1$-ші ретті минорлардың ішінде тым болмағанда біреуі нөлге тең болмаса, онда осы нөлге тең емес минорды көмкеретін $k+2$-ші ретті минорларды қарастырамыз, т.с.с.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2-ші ретті нөлге тең емес минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

белгілейік. Ендеше, $r(A) \geq 2$. Енді M_2-ні көмкеретін нөлге тең емес 3-ші ретті минорды іздейміз. Бұл минор

$$M_3 = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot A_{23} = -2 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 .$$

Бұдан, $r(A) \geq 3$ екендігі шығады.

Берілген A матрицасының соңғы екі жолы тең болғандықтан, барлық 4-ші ретті минорлар нөлге тең болады. Дербес жағдайы, M_3 минорын көмкеретін минорлар нөлге тең. Ендеше, $r(A) = 3$.

Е с к е р т у. Матрицаның рангі – осы матрицадағы сызықты тәуелсіз жолдардың (бағандардың) санына тең. 9 мысалда бұл сөйлемнің мағынасын былай түсінуге болады: A матрицасының 1,2,3 жолдары сызықты тәуелсіз, ал А матрицасының қалған жолдары (4 жол) 1,2,3 жолдардың сызықтық комбинациясы бойынша өрнектеледі.

3. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется о б р а т н о й для квадратной матрицы A, если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E - единичная матрица.

Квадратная матрица A называется н е в ы р о ж д е н н о й (неособенной), если ее определитель $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае матрица A называется в ы р о ж д е н н о й (особенной).

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет единственную обратную матрицу.

Если матрица

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

невырожденная матрица, т.е. $\det A \neq 0$, то для нее обратную матрицу можно найти по формуле:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A},$$

где $\tilde{A}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ - присоединенная (союзная) матрица к матрице A.

Здесь A_{ij} - алгебраические дополнения элементов a_{ij}, $(i,\ j=\overline{1,n})$.

Пример 14.

Для матрицы A найти обратную матрицу A^{-1}, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Решение.

Сначала найдем определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=1+24-6-9+4-4=10.$$

Так как $\det A\neq 0$, то матрица A - невырожденная, и, следовательно, существует обратная ей матрица

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\tilde{A},\ \text{где}\ \tilde{A}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Вычислим алгебраические дополнения:

$$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1-4=-3,$$

$$A_{12}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-(-2-12)=14,$$

$$A_{13}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=2+3=5,$$

$$A_{21}=(-1)^3\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-(-2+3)=-1,$$

$$A_{22}=(-1)^4\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-1+9=8,$$

$$A_{23}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-(1-6)=5,$$

$$A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & 4\end{vmatrix}=8-3=5,$$

$$A_{32}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 4\end{vmatrix}=-(4+6)=-10,$$

$$A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1-4=-5.$$

Тогда получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}3 & -0{,}1 & 0{,}5 \\ 1{,}4 & 0{,}8 & -1 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}.$$

Проверим выполнение условия $A \cdot A^{-1} = E$.

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 14 & 8 & -10 \\ 5 & 5 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

4. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выберем в матрице A произвольные k строк и k столбцов ($k \le \min(m,n)$).

Определитель порядка k, составленный из элементов, стоящих на пересечении выделенных k строк и k столбцов, называется *минором* k-го порядка этой матрицы.

Рангом матрицы A называется наибольший порядок ее миноров, отличных от нуля, и обозначается $rang(A)$ или $r(A)$.

Если $rang(A) = rang(B)$, то матрицы A и B называются эквивалентными и обозначаются $A \sim B$.

Вычисление ранга матрицы можно производить методом окаймляющих миноров и методом элементарных преобразований.

1. Вычисление ранга матрицы методом окаймляющих миноров

Если в матрице A имеется минор k-го порядка неравный нулю, а все ее миноры $(k+1)$-го порядка, окаймляющие этот минор, равны нулю, то ранг матрицы A равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

2. Вычисление ранга матрицы методом элементарных преобразований

К элементарным преобразованиям матрицы относятся:

1) перестановка двух параллельных рядов матрицы;
2) умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на некоторое число;
4) вычеркивание строки матрицы, все элементы которой равны нулю.

Ранг матрицы не изменяется от элементарных преобразований.

Используя элементарные преобразования, матрицу приводят к виду, когда все ее элементы, кроме $a_{11}, a_{22}, ..., a_{rr}$ $(r \le \min(m,n))$ равны нулю. Отсюда, ранг матрицы равен r.

Пример 15.

Вычислить методом окаймляющих миноров ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & -3 \\ 4 & 15 & 8 & 7 \\ 2 & 17 & 4 & 13 \end{pmatrix}$.

Так как минор второго порядка $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 26 \ne 0$, то ранг матрицы A не меньше 2. Найдем для этого минора окаймляющие миноры третьего порядка.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 4 & 15 & 8 \\ 2 & 17 & 4 \end{vmatrix} = \left| \text{I строка} \cdot (-2) + \text{II строка} \right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 13 & 0 \\ 2 & 17 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & 15 & 7 \\ 2 & 17 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{I строка} \cdot (-2) + \text{II строка} \\ \text{I строка} \cdot (-1) + \text{III строка} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 13 & 13 \\ 0 & 16 & 16 \end{vmatrix} = 0.$$

Итак, все окаймляющие миноры равны нулю. Следовательно, $rang(A)=2$.

Пример 16.

Вычислить ранг матрицы B методом элементарных преобразований

$$B=\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ -1 & -4 & 5\\ 3 & 1 & 7\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ -1 & -4 & 5\\ 3 & 1 & 7\end{pmatrix}\sim\left|\text{II строка}\cdot(-1)\right|\sim\begin{pmatrix}0 & 2 & -4\\ 1 & 4 & -5\\ 3 & 1 & 7\end{pmatrix}\sim\left|\text{I строка}\leftrightarrow\text{II строка}\right|\sim\begin{pmatrix}1 & 4 & -5\\ 0 & 2 & -4\\ 3 & 1 & 7\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\left|\begin{array}{l}\text{II строка}\cdot\frac{1}{2}\\ \text{I строка}\cdot(-3)+\text{III строка}\end{array}\right|\sim\begin{pmatrix}1 & 4 & -5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & -11 & 22\end{pmatrix}\sim\left|\text{II строка}\cdot 11+\text{III строка}\right|\sim\begin{pmatrix}1 & 4 & -5\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 4 & -5\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

Отсюда $rang(B)=2$, так как $\begin{vmatrix}1 & 4\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$.